Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-Abril 2009

Nombre: ____________________________

Carnet: ____________________ Sección: ________

MA-3111-1:30 p.m.—Segundo Parcial, 2009, 40 %—A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso.

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$(1/\lvert a\rvert)\hat{f}(\omega/a)$
$f_{gen}^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega)$
$e^{-cx^2/2}$	$(1/\sqrt{2\pi c})e^{-\omega^2/2c}$

$1/(c^2+x^2)$	$(1/2c)e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$c/[\pi(c^2+\omega^2)]$
$(\operatorname{sen} cx)/x$	$(1/2)1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$(\operatorname{sen} c\omega)/\pi\omega$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$1/2\pi$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi x^2\cos(ax)dx = \frac{\left(\pi^2a^2-2\right)\sin(\pi a)+2\pi a\cos(\pi a)}{a^3}, \qquad \int_0^\pi x^2\operatorname{sen}(ax)dx = \frac{\left(2-\pi^2a^2\right)\cos(\pi a)+2\pi a\sin(\pi a)-2}{a^3}$$

---

1. (7 puntos) Calcula la transformada de Fourier seno de $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{\operatorname{sign}(w)\pi}{2}}$$

Solución
Aplicamos la definición:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(wx)}{x}dx = \operatorname{sign}(w)\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}d\xi = \frac{\operatorname{sign}(w)\pi}{2}$$

Para calcular la integral hemos hecho el cambio de variable $\xi = wx$ nota que la integral no depende de w pero si del signo de w.

2. (13 ptos.) Halle $u(x,t)$ acotada tal que

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2 - \pi^2 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{-4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(1+2n)^3}\cosh\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)}$$

Solución

Buscamos soluciones por separación de variables

$$u(x,t) = \phi(x)T(t) \Rightarrow \phi''(x) = \lambda\phi(x), \qquad T''(t) = -\lambda T(t)$$

Las condiciones de contorno $u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$ obligan a que $\lambda < 0$, $\lambda = -k^2$ y $\phi(x) = \cos(kx)$ y

$$\cos(k\pi) = 0 \Rightarrow k\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow k_n = \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$$

En particular nota que no encontramos ninguna solución con $\lambda = 0$. La solución para $T(t)$ es

$$T(t) = A\cosh(k_n t) + B\,\mathrm{senh}(k_n t)$$

Luego la solución más general es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cosh(k_n t)\cos(k_n x) + B_n\,\mathrm{senh}(k_n t)\cos(k_n x)\right)$$

La condición inicial $u(x,0) = x^2 - \pi^2$ implica (usando la ayuda)

$$x^2 - \pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2-\pi^2)\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{(\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 - 2)(-1)^n}{\left(\frac{1}{2}+n\right)^3} - \pi^2\frac{\mathrm{sen}(k_n x)}{k_n}\Bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{-4(-1)^n}{\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)^3}$$

Donde he tenido en cuenta que $\mathrm{sen}(k_n\pi) = (-1)^n$ y $\cos(k_n\pi) = 0$.
La otra condición incial $u_t(x,0) = 0$ simplemente implica que $B_n = 0$

$$u(x,t) = \frac{-4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(1+2n)^3}\cosh\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)$$

3. (13 ptos.) Halle $u(x, y)$ acotada para $y > 1$ tal que

$$\begin{cases} 4u_{xx} + u_{yy} = 0 & ; \ x \in \mathbb{R} \quad 0 < y < \infty \\ u(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x, y) = \frac{y}{2\pi((y/2)^2 + x^2)}}$$

Solución

Este problema parece resolverse usando transformadas de Fourier

$$\hat{u}(w, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-iwx} dx$$

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w, y) e^{iwx} dw$$

La ecución para la transformada es:

$$-4w^2 \hat{u}(w, y) + \hat{u}_{yy}(w, y) = 0 \Rightarrow \hat{u}(w, y) = A(w) e^{-|w|y/2}$$

La solucón es así porque debe ser acotada y $y > 0$. La solución más general es, por lo tanto:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(w) e^{-|w|y/2} e^{iwx} dw$$

Para hallar $A(w)$ imponemos la condición en $y = 0$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(w) e^{iwx} dw \Rightarrow A(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{2\pi}$$

La solución final, es, por tanto:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|y/2} e^{iwx} dw = \frac{y}{2\pi((y/2)^2 + x^2)}$$

Para la última integral simplemente he usado las tablas.

4. (7 ptos.) Calcule la integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\, dx$$

$$\boxed{I(a) = 2\operatorname{atan}(a/2)}$$

Solución

Para calcular la integral usamos la identidad de Plancharel con $f(x) = e^{-2|x|}$ y $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1_{(-a,a)(w)}}{2} \frac{2}{\pi(4+w^2)} dw =$$
$$\int_{-a}^{a} \frac{2}{4+w^2} dw = 2\operatorname{atan}(a/2)$$